

ウラムの螺旋に関する推測

三重県立伊勢高等学校 2年

1. 概要

ウラムの螺旋(図1)とは、1を中心に渦巻き状に数字を配列したもの(以下、渦巻き状の数字配列)のうち、素数だけを黒く着色したときに見られる特有の模様であり、1963年にポーランドの数学者スタニスワフ・ウラムによって発見された。

今回は、着色する対象を素数以外の様々な数列とし、分布の傾向を調べた。また渦巻き状の数字配列における斜め45度の数列を一般式として表現することを試みた。

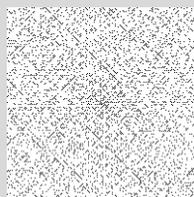


図1 ウラムの螺旋



図2 中心部の概要

2. 実験1

—意図—

この実験では素数の特異性によって、特有の螺旋構造が形成されているのかどうかを調べることが目的である。

—仮説—

素数の螺旋同様、何らかの特徴が確認できる。

—実験方法—

エクセルで生成した渦巻き状の数字配列を用いて対象の数列(今回は半素数、自然数 n の倍数各々)を着色し、見られる特徴を調べる。

—結果—

1: 半素数(*2つの素数の積)(図3)

・視覚的に確認できる特徴は現れなかった。

2: 自然数 n の倍数(図4,5)

・自然数 n の因数に基づいた特徴が見られた。

・8の倍数は特に顕著だった。



図3 半素数

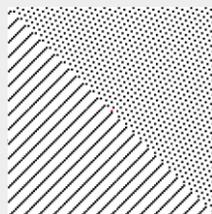


図4 8の倍数

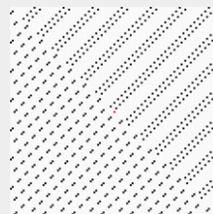


図5 16の倍数

—考察—

実験1より、全ての数列で特徴を示すわけではなく、また素数には螺旋を描くための決定的な要因を持つことが考えられる。

実験2より、渦巻き状の数字配列を構成する上で“8”という数字は何らかの意味を持つことが予想される。



3. 実験2

—意図—

この実験ではウラムの螺旋を形作る”渦巻き状の数字配置”の特性を調べることが目的である。

—仮説—

ウラムの螺旋の斜め**45度**における数列の一部を取り出して考えると配列に何らかの特徴や性質が見られる。

—方法—

任意の一つの数字を選びその数字がなす斜めに形成された4方向の数列を取り出し規則性を調べる。具体的には1を基準として**45度**で各方向に進む数列を一般項として式を求める。

—結果—

図3のとおり、階差数列の一般項となった。

—考察—

実験2の結果にもあるように階差数列となる。この階差数列に含まれる等差数列の公差がいずれも”8”であることがわかる。このことから”渦巻き状数字配列”には”8”という数字が関係していることが推測される。

①1を基準として右上に進む数列

(1 5 17 37 65...)

$$1 + \sum_{k=1}^{n-1} (8k - 4)$$

②1を基準として右下に進む数列

(1 7 21 43 73...)

$$1 + \sum_{k=1}^{n-1} (8k - 2)$$

③1を基準として左上に進む数列

(1 3 13 31 57...)

$$1 + \sum_{k=1}^{n-1} (8k - 6)$$

④1を基準として左下に進む数列

(1 9 25 49 81...)

$$1 + \sum_{k=1}^{n-1} (8k)$$

図6

—課題—

今後は今回取り出した一般項をもとに、さらに一般化された一般項の階差数列の中の公差が”8”になることを証明することが最終目的である。

4. 課題と今後の展望

今回の実験1,2を受けて共通して言える課題は一般化の必要性である。最初の概要で述べた、”素数という数列”と”渦巻き状の数字配置”の特徴を分けて調べるといふ点ではある程度の結果を得ることができた。今後の活動では、今回得た”素数という数列”と”渦巻き状の数字配置”の2つの特徴を一般化した上で、最終的には、ウラムの螺旋の素数配置を傾向と割合として表現していきたい。

6. 参考文献

岡本健太郎 暇な会議で大発見素数が描く不思議な模様！

<https://wakara.co.jp/mathlog/20200920> 2023 12/22

