

有限差分法による砂型熱間ひずみ試験の 2 次元非定常熱伝導解析

森 康暢*, 金森陽一*

2D Unsteady Heat Transfer Analysis of Thermal Distortion Test of Sand Molds by Finite Difference Method

Yasunobu MORI and Yoichi KANAMORI

In this study, heat transfer properties of additive manufactured sand molds coated by various foundry coatings were estimated from measured temperatures in thermal distortion tests based on a heat transfer model. The two-dimensional heat transfer model was calculated by numerical analysis using the explicit finite difference method, and the mathematical optimization method was applied to estimate the heat transfer properties of the sand molds. It was suggested that the method used in this study could be applicable to evaluate the effects of the foundry coating on the heat transfer properties of sand molds from measured temperatures in thermal distortion tests.

Keywords: Thermal Distortion Test, Foundry Coating, Heat Transfer, Finite Difference Method, Additive Manufacturing, Sand Mold

1. はじめに

熱間ひずみ試験は、砂型が高温に曝されたときに生ずる熱膨張や変位量を調べる試験であり、砂型の品質管理や、高温性質の研究などに幅広く活用されている¹⁻³⁾。筆者らは、令和3年度の三重県工業研究所研究報告⁴⁾にて、一般的な熱間ひずみ試験に、砂型内部の温度測定を組み合わせる手法により、基材の異なる各種塗型剤が積層造形砂型の熱間特性に及ぼす影響について評価した。積層造形砂型に塗型を施すことにより、熱間ひずみ試験における破断に至るまでの時間(破断時間)が増加し、耐熱性の向上が認められた。すなわち、温度測定では、塗型の種類によって400~500℃間の温度上昇速度に±10%程度(対塗型なし比)の増減がみられ、塗型が砂型の伝熱特性に影響を及ぼすことが示された。特に、破断時間の増加が顕著であったアルミナシリケートでは温度上昇速度が10%低下していたことから、耐熱性向上の1

つの要因は塗型による断熱効果によると考えられた。

上記の研究では、400~500℃間の温度上昇速度を代表値として比較するにとどまり、温度測定データ全体から分析したものではなかった。また、このことにも関連するが、各塗型条件でみられた温度測定データの差異については、熱物性に関する特性値として評価することが望ましい。他の先行研究では、熱間ひずみ試験における変位の発生を熱-構造連成解析によってシミュレーションした事例⁵⁾がある一方で、砂型の熱物性値や特性値を測定データから逆解析的に推定することは行われていない。熱間ひずみ試験における砂型の昇温をモデル化し熱物性値等の推定が可能となれば、熱間の砂型特性の簡易な試験法としてより幅広い用途に活用できる可能性が考えられる。そこで本研究では、図1に示す熱間ひずみ試験の砂型の昇温について伝熱モデルを作成し、差分法を用いた数値解析と数理最適化の手法により、温度測定データからモデル上の熱物性値や特性値の推

* 金属研究室

定を試みた。

2. 実験方法

2.1 熱間ひずみ試験のデータセット

データ分析には、塗型なしおよび各種塗型を施した積層造形砂型を試験して得られた既報⁴⁾の温度測定データを用いた(後の図5の実線に示す)。温度測定データは1秒間隔で測定したもので、各条件のデータ数は $n=3$ である。なお、表1に示すように、各種塗型の塗布厚さは、塗型剤間で差異が認められた。温度測定データやそれから推定された値には、塗型の種類の違いのみならず、厚さの違いによる影響があることを留意する必要がある。

2.2 伝熱モデルの設定

簡略のため、対象の物体においては砂型の軸方向の伝熱を考えず、温度測定を実施した加熱部直上の断面(図1)を対象とする2次元平面問題とし、さらにバーナーで砂型底面が外部から加熱される2次元非定常熱伝導問題(内部発熱なし)として、以下のとおり伝熱をモデル化した。

図2に示すように、砂型の断面を解析領域 Ω

$$\Omega := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 0 < x < W, 0 < y < H\}$$

とにおいて、砂型内部では、伝熱の基礎式

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (\in \Omega, t > 0) \quad \dots (1)$$

を考える。ここで、 $\alpha = \lambda/\rho C$ は温度拡散率であり、 λ は熱伝導率、 ρ は密度、 C は比熱である。

初期条件として、砂型の初期温度を室温

$$T = T_0 = 25 \text{ }^\circ\text{C} \quad (\in \Omega, t = 0)$$

とした。また、砂型の境界条件として、

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial n} = h(T - T_f) \quad (\in \partial\Omega, t > 0)$$

なる線形熱伝達として与えた。ここで、 h は熱伝達係数、 T_f はバーナー加熱に起因する環境雰囲気温度であり、 n は境界線に垂直な方向の位置の座標、 $\partial\Omega$ は Ω の境界を表す。なお、 h は正形状の砂型の上下左右の各面で共通とし、 T_f は実験時のバーナーの火炎の状況を考慮して、図2として与えることとした。各面内で線形に変化もしくは一定、各面の接続点で連続な線形近似モデルとした。

なお、上記の伝熱モデルは、図3(a)に模式されるような均一材料の伝熱モデルであり、塗型層を

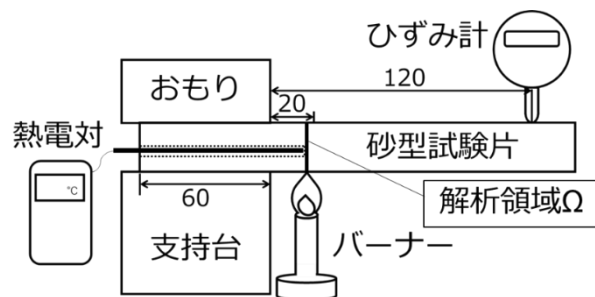


図1 熱間ひずみ試験装置

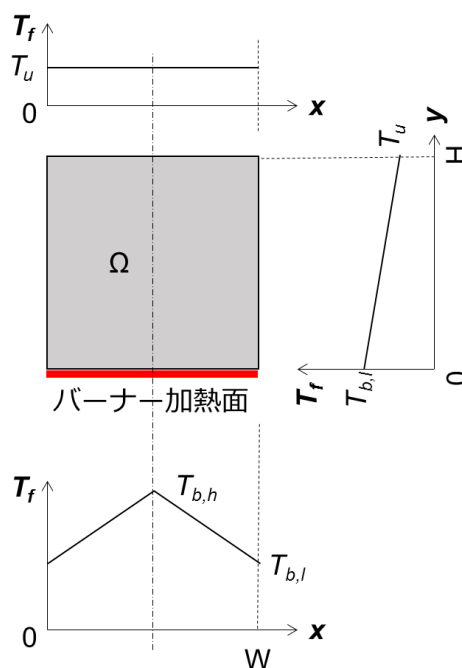


図2 伝熱モデルの解析領域と境界条件

(計算には $T_{b,h}=1,800 \text{ }^\circ\text{C}$ 、 $T_{b,i}=1,000 \text{ }^\circ\text{C}$ 、 $T_u=25 \text{ }^\circ\text{C}$ を用いた。)

無視している。より実際の伝熱現象に近いモデルは、例えば図3(b)に示すような、塗型層と砂型で異なる物性値を持つ2層構造のモデルである⁹⁾。一方で、本研究のように砂型断面上の1点のみにおける温度測定データから、熱物性値や特性値の推定を行う場合、推定する物性値の数が増える2層構造のモデルを適用することは不可能である。したがって、塗型層が砂型の伝熱特性に及ぼす影響を評価するため、塗型層による影響を、均一材料の伝熱モデルにおける熱伝達現象で表すこととした。すなわち、塗型層の厚みは最大でも $90 \text{ }\mu\text{m}$ 程度と薄い⁴⁾ことから、砂型内部の伝熱特性に及

表 1 各種塗型の塗布厚さと最適化により推定された砂型の伝熱特性値

	塗布厚さ* [μm]	α [m ² ·s ⁻¹]	$Bi_{22.5}$
なし	-		2.613
マグネシア	61±6		2.812
アルミナシリケート	34±7	3.320 x 10 ⁻⁷	2.340
黒鉛	88±2		2.427
黒鉛-マグネシア	41±10		2.504
ジルコン	71±6		2.676

*平均値±SE (n=3)

ばす影響は小さいと考え、砂型の熱物性値(λ, ρ, C)が塗型なしおよび各種塗型剤を施した砂型において共通であると仮定した。

均一材料の伝熱モデルにおいて、温度分布は表面からの熱伝達量と固体内部の熱伝導との比率を表す無次元量であるビオ数 $Bi_L = hL/\lambda$ (L : 代表長さ)で決まる。本研究ではこの値を塗型の断熱性評価に用いることを検討した。すなわち、塗型による断熱効果を周辺環境からの熱の流入量 (=熱伝達率)として捉え、砂型自体の熱伝導率 λ (塗型とは無関係ですべての条件で一定と仮定)との比であるビオ数 Bi の大小で、各種塗型による伝熱特性に及ぼす影響の違いを数値化した。

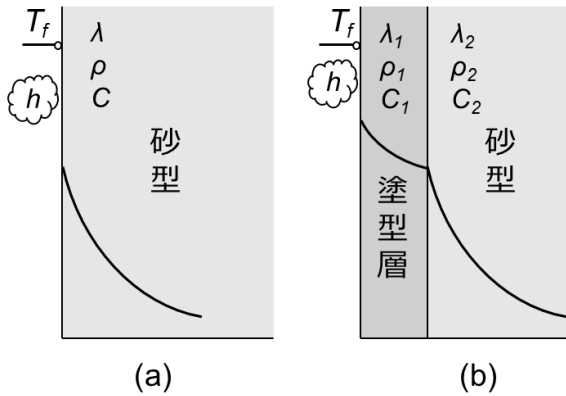


図 3 伝熱モデル模式図
(a)均一材料のモデル, (b)2層構造のモデル

2.3 有限差分法による数値解析

上記の伝熱モデルに対する解析として、偏導関数を有限個の離散化点で近似して数値解を求める差分法を用いた⁶⁻⁸⁾。特に、時間について前進差分、空間について中心差分を行う FTCS スキーム (Forward-Time Centered-Space) を採用した。

差分法を適用するにあたって、 Ω の二次元空間は分割数 N_x, N_y 個の点で、格子間隔

$$\Delta x := W/N_x$$

$$\Delta y := H/N_y$$

の差分格子に置き換え、各格子点の座標は

$$x_i := i\Delta x \quad (i = 0, 1, 2, \dots, N_x)$$

$$y_j := j\Delta y \quad (j = 0, 1, 2, \dots, N_y)$$

とおいた。また、時間については、ステップ時間として $\Delta t > 0$ をとり、

$$t_p := p\Delta t \quad (p = 0, 1, 2, \dots)$$

と表した。

【内部の点の計算 (図 4(a)参照)】

伝熱の基礎式(1)を以下のように差分化された方程式により近似した。すなわち、時間 t に関する1次微分係数は前進差分により

$$\left. \frac{\partial T}{\partial t} \right|_{i,j} \approx \frac{T_{i,j}^{p+1} - T_{i,j}^p}{\Delta t} \quad \dots (2)$$

と近似した。また、空間 x, y に関する2次微分係数を中心差分

$$\left. \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right|_{i,j} \approx \frac{T_{i+1,j}^p - 2T_{i,j}^p + T_{i-1,j}^p}{\Delta x^2}$$

$$\left. \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right|_{i,j} \approx \frac{T_{i,j+1}^p - 2T_{i,j}^p + T_{i,j-1}^p}{\Delta y^2}$$

により近似した。これらの近似を熱の基礎式(1)に代入することで、差分化された基礎式

$$\frac{T_{i,j}^{p+1} - T_{i,j}^p}{\Delta t} = \alpha \left(\frac{T_{i+1,j}^p - 2T_{i,j}^p + T_{i-1,j}^p}{\Delta x^2} + \frac{T_{i,j+1}^p - 2T_{i,j}^p + T_{i,j-1}^p}{\Delta y^2} \right)$$

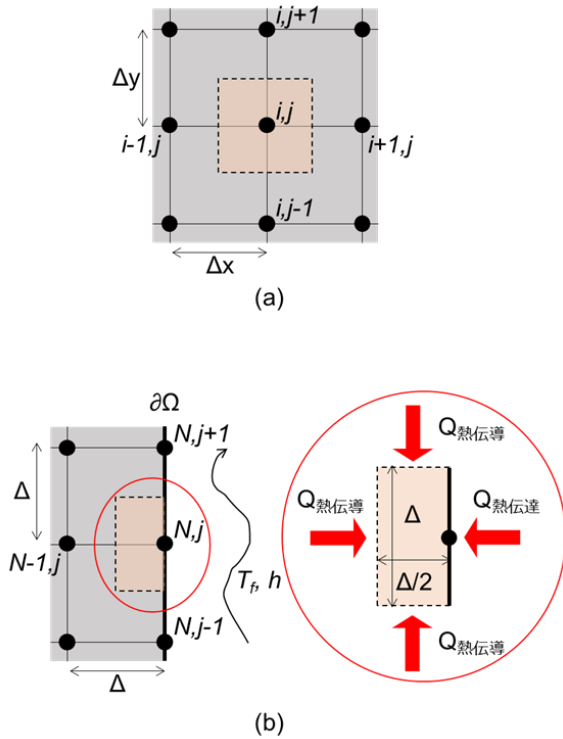


図4 差分格子
(a) 内部格子点, (b) 右辺境界点

を得た. なお, $T_{i,j}^p$ は時間 t_p における座標 (x_i, y_j) での温度を意味する.

さらに, $\Delta x = \Delta y = \Delta$ の場合, $T_{i,j}^{p+1}$ について解くと,

$$T_{i,j}^{p+1} = Fo(T_{i+1,j}^p + T_{i-1,j}^p + T_{i,j+1}^p + T_{i,j-1}^p) + (1 - 4Fo)T_{i,j}^p \quad \dots (3)$$

である. ここで, Fo は差分法のフーリエ数で $Fo = \alpha \Delta t / \Delta^2$ である.

【境界周辺での計算 (図4(b)参照)】

境界条件については, エネルギー収支法により計算式を導出した. 図4(b)に示すような境界と接する右側の座標 (x_N, y_j) のコントロールボリュームにおいて, 流入する熱量を考える. 各隣接する格子から熱伝導により流入する熱量は, フーリエの法則より

$$Q_{(N-1,j) \rightarrow (N,j)} = \lambda \frac{T_{N-1,j} - T_{N,j}}{\Delta} \cdot (\Delta \cdot 1)$$

$$Q_{(N,j+1) \rightarrow (N,j)} = \lambda \frac{T_{N,j+1} - T_{N,j}}{\Delta} \cdot \left(\frac{\Delta}{2} \cdot 1\right)$$

$$Q_{(N,j-1) \rightarrow (N,j)} = \lambda \frac{T_{N,j-1} - T_{N,j}}{\Delta} \cdot \left(\frac{\Delta}{2} \cdot 1\right)$$

となる. ただし, 隣接する格子間の温度勾配は差分近似した. また, 境界の熱伝達が生じる面では, 境界条件より

$$Q_{(N+1,j) \rightarrow (N,j)} = h(T_f - T_{N,j}) \cdot (\Delta \cdot 1)$$

である.

流入する熱量より, 比熱に対応して温度変化を生じるため, エネルギー収支は

$$\begin{aligned} & Q_{(N-1,j) \rightarrow (N,j)} + Q_{(N,j+1) \rightarrow (N,j)} + Q_{(N,j-1) \rightarrow (N,j)} \\ & + Q_{(N+1,j) \rightarrow (N,j)} \\ & = \rho C A \frac{T_{N,j}^{p+1} - T_{N,j}^p}{\Delta t} \cdot \left(\Delta \cdot \frac{1}{2} \cdot \Delta \cdot 1\right) \end{aligned}$$

となる. ただし, 時間 t に関する温度の1次微分は式(1)で差分近似した.

上式の座標 (x_N, y_j) のコントロールボリュームにおけるエネルギー収支を, $T_{N,j}^{p+1}$ について整理して

$$T_{N,j}^{p+1} = Fo(2T_{N-1,j}^p + T_{N,j+1}^p + T_{N,j-1}^p + 2Bi \cdot T_f) + (1 - 4Fo - 2Bi \cdot Fo)T_{N,j}^p \quad \dots (4)$$

を得た. ここで, Bi は差分法のビオ数で $Bi = h\Delta/\lambda$ である. 他の辺や角における差分方程式についても同様の手順で求めて計算に用いた.

以上の式(3)や式(4)などにより, 各格子点において, t_{p+1} 秒の温度を t_p 秒での温度を用いて計算した. ただし, 計算を安定して行うための条件は, Von Neumann の安定性解析から,

内部の点 : $Fo \leq 1/4$

境界周辺の点 (辺) : $Fo(2 + Bi) \leq 1/2$

境界周辺の点 (角) : $Fo(1 + Bi) \leq 1/4$

を満たす必要があることに注意した⁶⁾.

以上の差分式を計算するプログラムを, 表計算ソフト Microsoft Excel を用いて作成した. プログラムでは, W22.5 x H22.5 mm の砂型断面を $N_x, N_y = 21$ 個の格子点で分割し, ステップ時間 $\Delta t = 0.25$ 秒として計算を行った. また, 熱間ひずみ試験における測定データとの合わせこみを行うため, 解析領域の中心座標 (x_{11}, y_{11}) の温度を1秒毎に抽出して, 測定値と伝熱モデルによる計算値の残差を計算し, 以下のように数理最適化を行った. すなわち, 数理最適化による熱物性値や特性値の推定には Excel のアドイン機能「ソルバー」を用いた. ソルバーでは, 式(3), (4)の支配パラメータである差分法の Fo および Bi を決定する温度拡散率 α や h/λ を変数として, GRG (Generalized reduced gradient method) 非線形の解決方法によ

り、測定値と伝熱モデルによる計算値の残差 2 乗和を最小化する値を探索した。なお、 α は塗型なしおよび各塗型のすべての条件で共通として推定し、 h/λ を各塗型条件でそれぞれ推定をした。推定された h/λ から代表長さ L =試験片の厚み 22.5 mm としてビオ数 $Bi_{22.5}$ を算出した。

3. 結果と考察

表 1 に、推定された温度拡散率 α およびビオ数 $Bi_{22.5}$ を示す。また、図 5 に、温度測定データと伝熱モデルによる計算温度値を並べて示す。

推定された温度拡散率を、文献値⁹⁾と比較すると、一般的な砂型の温度拡散率は $7.0 \times 10^{-7} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ であり、オーダーレベルで一致することが確認された。文献値との誤差については、本研究の砂型試験片は積層造形砂型であり一般的な砂型とは砂の種類や粒度が異なること¹⁰⁾、また、周辺温度条件が単純な線形モデルであること、そして本研究で塗型剤の「断熱性」を塗型剤が塗布された砂型の表面、すなわち砂型と環境雰囲気との界面における熱伝達のみをモデル化したことなどが考えられる。伝熱特性に関しては、実際には、それ以外にも、塗型剤浸透領域内の熱伝導や塗型剤と砂型の界面における熱伝達を総合したものとして考えるべきであり、このことについては今後検討した

い。

断熱性を象徴するものであって、しかも容易に求められる熱的特徴量として、400~500 °C 間の温度上昇速度を取り上げ、これと本研究における伝熱モデルの特徴量であるビオ数 $Bi_{22.5}$ の相関を調べた。各種塗型条件 ((a)塗型なし, (b)マグネシア, (c)アルミナシリケート, (d)黒鉛, (e)黒鉛-マグネシア, (f)ジルコンの 6 種) において推定されたビオ数 $Bi_{22.5}$ と、400~500 °C 間の温度上昇速度 (塗型なし比) の平均値の関係を図 6 に示す。相関係数は 0.969 であり、両者には極めて高い相関が示された。なお、その相関係数について相関分析を適用した結果、統計的に有意 ($p < 0.01$) であると認められた。本手法によるビオ数は塗型の温度上昇パターン全体から推定されたものであることから各塗型剤の断熱特性をより正確に定量化できると期待されるが、この相関の高さはそのことの一つのエビデンスになると考えられる。

今回、各種塗型剤によって異なるビオ数の推定結果を得た。断熱性には、塗型剤の伝導率のほか、塗布厚さが影響すると考えられる。今回の推定では、塗布された塗型膜の厚さにばらつきがあるため塗型間の比較評価はできないものの、本手法により断熱性を推定できる可能性が示唆された。

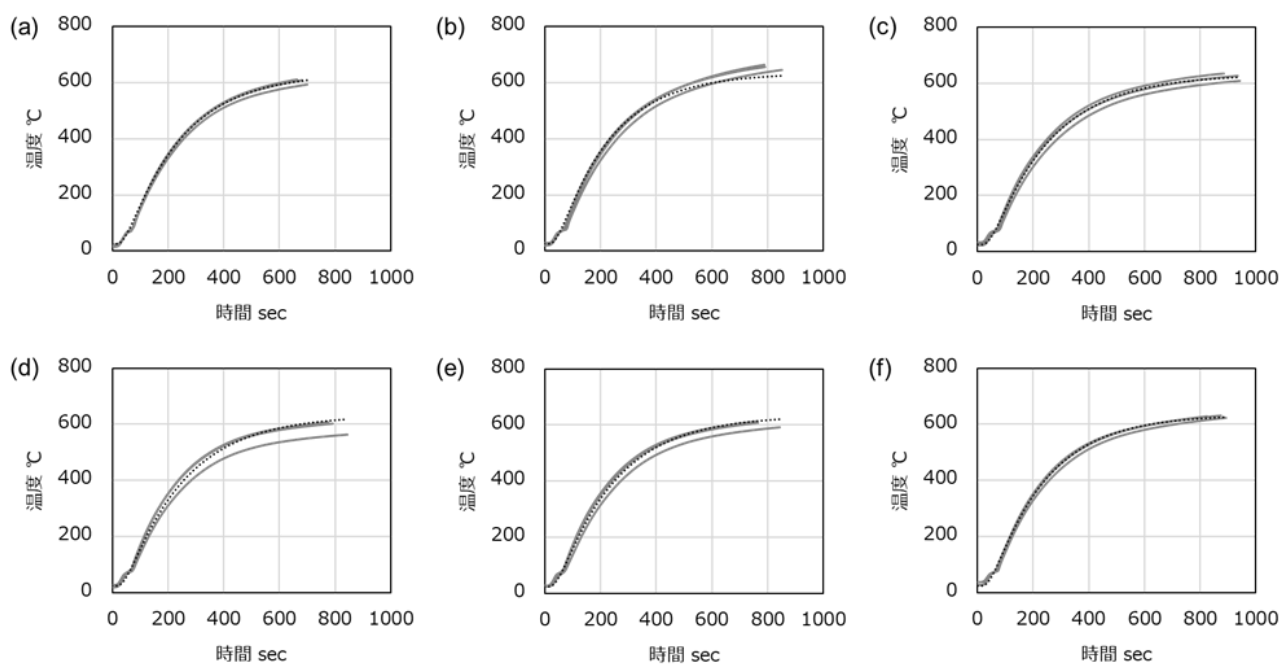


図 5 温度測定データ (実線) およびモデル計算値 (点線)

(a)塗型なし, (b)マグネシア, (c)アルミナシリケート, (d)黒鉛, (e)黒鉛-マグネシア, (f)ジルコン

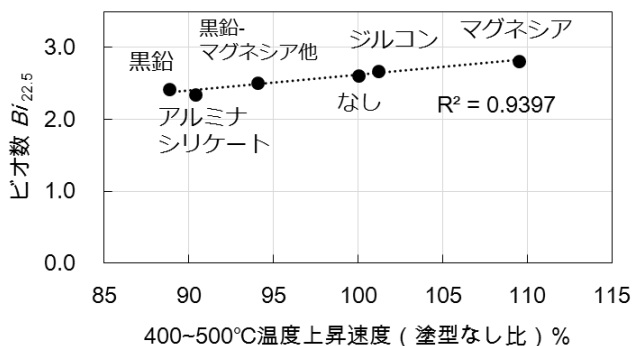


図6 推定されたバイオ数 $Bi_{22.5}$ と温度上昇速度の関係

今後については様々な展開が考えられる。まず、塗型が砂型の伝熱性に及ぼす影響を、伝熱モデルの上でバイオ数の大小により評価できることが示されたが、塗型剤の熱物性値を熱分析試験により測定するなどして、推定の確からしさを確認していく必要がある。

次に、熱間ひずみ試験と組み合わせた温度測定から、最適化手法により簡易に熱物性値や熱的な状態変化が推定できる可能性が示された。

図7に塗型なしの条件で推定された熱特性値から、各時刻における砂型の各部の温度分布を計算した結果を例示する。砂型の各部の昇温が推定できれば、それに基づいて砂粒を接合するバインダの熔融・焼失も推定でき、ひいては砂粒の崩落もシミュレーションできる可能性がある。

さらなる展開も考えられる。実際の溶湯の熱的特性は熱間ひずみ試験におけるバーナー炎とはまったく異なるので、本伝熱モデルで得られたバイオ数は溶湯の注湯に適用することはできない。しかし、本研究の手法、すなわち「偏導関数を有限個の離散化点で近似して数値解を求める差分法による砂型伝熱問題のモデル化手法」は、注湯に伴う砂型の温度上昇を推定する問題にも適用できる。これにより、事前に温度上昇を予測し、中子折れなどの铸造時欠陥を引き起こさないように砂型を設計変更するなど、「砂型の予防的品質管理」に活用することが期待される。

4. 結論

本研究において、熱間ひずみ試験における砂型加熱についての2次元の伝熱モデルを作成し、

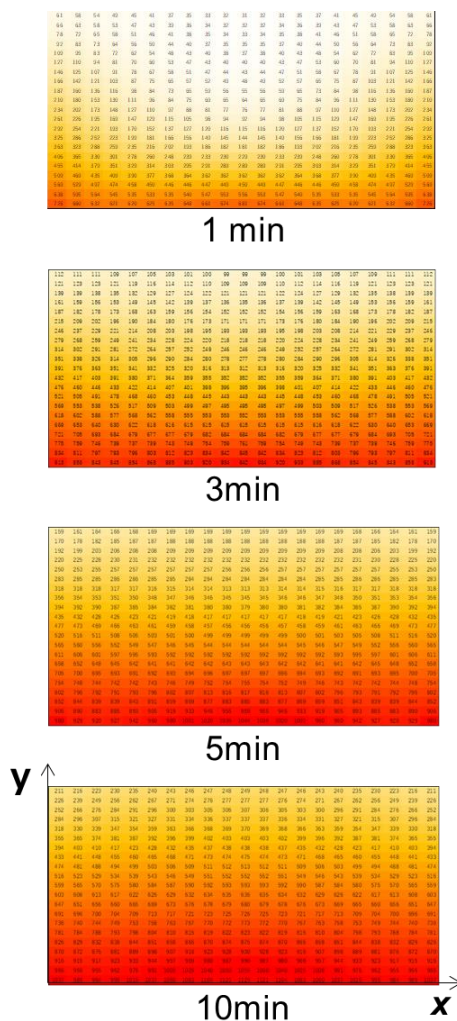


図7 熱間ひずみ試験の各時刻における加熱部直上の断面の温度 (塗型なし、濃色ほど高温であることを示す。)

差分法による数値解析と数理最適化の手法を用いて、塗型なしおよび各種塗型剤を施した砂型で得られた温度測定データから、砂型の熱物性値や特性値の推定を試みたところ、以下の結果が得られた。

- 均一材料の伝熱モデルに基づいて、塗型剤なしおよび各種塗型剤に対する昇温プロファイルを、全ての条件で共通の温度拡散率、およびそれぞれに固有のバイオ数によりシミュレートできた。
- 推定された砂型の温度拡散率は、一般的な砂型の文献値とオーダーレベルで一致した。
- バイオ数を推定して、400~500℃間の温度上昇速度(塗型なし比)と比較したところ、両者には極めて高い相関が示された。

参考文献

- 1) Morgan, A.D. et al.: "The BCIRA hot distortion tester for quality control in production of chemically bonded sands". AFS Transactions. 91, p73-80 (1975)
- 2) 中山 進ほか: "鑄型の生産技術". (一財)素形材センター, p267 (1995)
- 3) J. Jakubski et al.: "The influence of the protective coating type on thermal deformation of casting cores". Archiwum Odlewnictwa, 5(15), p164-169 (2005)
- 4) 森 康暢ほか: "積層造形砂型の熱間特性に及ぼす塗型の影響". 三重県工業研究所研究報告, 46, p22-28 (2022)
- 5) I. Zenon: "Estimation of coupled thermo-physical and thermo-mechanical properties of porous thermolabile ceramic material using Hot Distortion Plus® test". Defect Diffus. Forum, 312-315, p764-769 (2011)
- 6) T. Bergman et al.: "Fundamentals of heat and mass transfer". John Wiley & Sons, p330-337 (2011)
- 7) S. Wang et al.: "Solving of two-dimensional unsteady-state heat-transfer inverse problem using finite difference method and model prediction control method". Complexity, 2019, Article ID 7432138 (2019)
- 8) 刃刀資彰: "パソコンによる熱伝導数値解析プログラム (種々の計算スキームの比較)". 日本原子力研究所, p3 (1988)
- 9) 新山英輔: "鑄造伝熱工学—鑄造設計の基礎—" (株)アグネ技術センター, p166,209 (2001)
- 10) 金森陽一ほか: "積層造形により作製した砂型の特性". 三重県工業研究所研究報告, 41, p95-101 (2017)